

Il progetto per un nuovo allestimento dei modelli matematici a Napoli

Nicla Palladino

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università degli Studi di Perugia, Via Vanvitelli, 1. I-06123 Perugia.

E-mail: nicla.palladino@unina.it

RIASSUNTO

A partire dalla seconda metà dell'Ottocento e fino agli anni '30 del Novecento, ampia diffusione ebbero l'ideazione, la produzione e l'acquisto da parte di istituti universitari di modelli plastici rappresentanti superfici e altri enti matematici. Questi oggetti erano impiegati nella ricerca e nella didattica della matematica e fornivano un valido aiuto nel rendere evidenti proprietà notevoli e risultati scientifici relativi a vari settori della disciplina. Non meno importante fu la realizzazione di apparecchi capaci di tracciare figure geometriche e di strumenti particolarmente efficaci nell'impiego della matematica per risolvere problemi posti dall'ingegneria e dalle altre scienze applicate.

Da qualche decennio, i modelli di superfici matematiche e gli strumenti hanno subito una fase di rivalutazione e sono oggetto di interesse per il loro valore storico, oltre che matematico. La collezione di oggetti matematici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università "Federico II" di Napoli richiede una riorganizzazione che miri a contestualizzarli in un'ottica che possa prevedere oggi un loro impiego secondo finalità educative e divulgative.

Parole chiave:

modelli matematici, museo storico-scientifico, divulgazione.

ABSTRACT

The project for a new reorganisation of Neapolitan mathematical models

Starting from the second half of the nineteenth century and up to the thirties of the twentieth century, we can note wide diffusion, production and acquisition by universities of models for mathematics research and teaching. These objects provided a valuable aid in making evident remarkable properties and scientific results related to various branches of the discipline. No less important the creation of instruments capable of tracing geometric figures to solve problems posed by engineering and other applied sciences was. For a few decades, the models of mathematical surfaces have been studied for their historical as well as mathematical value.

The model and instrument collection of the Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" of the University "Federico II" of Naples requires a reorganization that aims to contextualize them in a perspective that can now provide for their use for mathematical educational and dissemination purposes.

Key words:

mathematical models, historical-scientific museum, teaching of mathematics.

I MODELLI DI SUPERFICI MATEMATICHE

Tra la seconda metà dell'Ottocento e gli anni Trenta del Novecento, ebbero ampia diffusione la realizzazione e l'utilizzo di modelli plastici rappresentanti superfici e altri enti matematici. L'impresa interessò alcuni dei più attivi istituti matematici presenti presso le università e i politecnici europei, coinvolgendo studiosi di prim'ordine, feconda di interazioni con la ricerca e la didattica nelle "matematiche superiori" ma anche con il settore delle arti figurative, l'iniziativa, di ampio respiro culturale, coinvolse anche importanti centri museali d'Europa.

La costruzione di questi oggetti, costituiti di vari materiali, fu inizialmente di tipo artigianale: essi

erano sostanzialmente ideati e realizzati da docenti universitari che si avvalevano della collaborazione dei loro studenti, presso i laboratori annessi agli istituti universitari. I modelli erano costruiti impiegando materiali diversi: ottone, gesso, cartone, filo metallico o di fibra naturale, legno e lamelle di legno, celluloidi, lamine metalliche; servivano a rendere concrete ed evidenti proprietà notevoli riguardanti il tema di ricerca su cui si investigava e a mostrare alcuni risultati che progressivamente si conseguivano in diversi settori delle matematiche pure e applicate, come geometria descrittiva e proiettiva, geometria analitica, geometria algebrica, topologia, teoria delle funzioni, meccanica razionale, fisica-matematica, scienze delle costruzioni. Ideati per le "matematiche superiori" alcuni modelli furono pensati per migliora-

re la didattica di quelle discipline che si insegnavano nei primi anni dei corsi universitari – per matematici, fisici e ingegneri –, al fine di potenziare negli studenti la componente intuitivo-visiva compresente nell'apprendimento delle stesse discipline e, specialmente, della geometria.

Data l'ampia richiesta e la sempre più vasta diffusione di tali oggetti, la fabbricazione dei modelli fu in un secondo momento intrapresa da ditte costruttrici che ne iniziarono una vendita sistematica accompagnata da cataloghi. La più attiva iniziativa imprenditoriale in tal senso fu probabilmente quella di Ludwig Brill, fondata a Darmstadt nel 1877 e continuata, dal 1899 in poi, da Martin Schilling, prima in Halle an der Saale e poi a Leipzig. Con la sua impresa, L. Brill fu capace di riprodurre, collezionare e diffondere, raccolte in un "Catalog" divise per serie, le singole, sparse ideazioni di modelli e di strumenti matematici. Il catalogo ebbe varie pubblicazioni, ampliandosi di volta in volta con nuovi oggetti; la più completa è la pubblicazione del 1911, che uscì con il nome di "Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht" (Schilling, 1911). Il catalogo risultava diviso in due parti: nella prima, i modelli venivano classificati in serie; nella seconda, i modelli erano omogeneamente raggruppati tenendo conto del legame scientifico tra i concetti matematici che essi rappresentano. Nella sezione tematica, venivano illustrati proprietà e dettagli degli oggetti venduti, corredati spesso da un disegno. Il volume non si presentava come semplice elencazione di pezzi ma, arricchito com'era da puntuali esposizioni dell'argomento sotteso e da rimandi ai saggi scientifici ispiratori, rappresentava, nelle sue varie edizioni, la summa descrittiva del "sistema dei modelli plastici" che fiorì in Germania per circa quarant'anni.

Come accennato, molte delle serie edite e vendute dalla casa editrice Brill-Schilling erano riproduzioni degli originali costruiti presso vari istituti universitari, tra cui il più importante era senza dubbio il Mathematisches Institut der technischen Hochschule di Monaco di Baviera, in cui insegnavano allora Alexander Brill (1842-1935) e Felix Klein (1849-1925). E infatti fu proprio dalla loro iniziativa di progettare e far

costruire agli studenti modelli matematici che venne stimolata la nascita della ditta di L. Brill.

Per le collezioni di modelli e strumenti italiani e stranieri si vedano Morelli e Palladino F. (1992), Palladino F. e Palladino N. (2001), Fischer (1986).

In Italia non si riuscì a istituire un vero e proprio polo di produzione di modelli matematici per cui la maggior parte delle collezioni italiane fu acquistata dalla Germania ed esse vennero a costituirsi organicamente a partire dagli anni Ottanta del XIX secolo. Vi furono però iniziative locali che produssero singole realizzazioni molto significative eseguite da emeriti studiosi o da studenti su indicazione dei loro docenti; un esempio molto significativo è la "Cuffia di Beltrami" per le geometrie non euclidee (Capélo & Ferrari, 1982). Singoli modelli, conservati ancora oggi in varie università italiane, furono realizzati onde far fronte a specifiche richieste scientifiche e didattiche, come accadde presso l'Università di Napoli "Federico II", dove è conservato il più antico nucleo di modelli di produzione italiana che si costituì a partire dal 1901, grazie ad Alfonso Del Re (1859-1921), titolare della cattedra di Geometria descrittiva (Carbone et al., 1996; Carbone et al., 1998b; Carbone et al., 2002).

Da segnalare, inoltre, è l'impresa di Luigi Campedelli (1903-1978), professore all'Università di Firenze: con gli anni Cinquanta del secolo scorso, egli, in seguito a un deliberato dell'Assemblea generale dei soci dell'UMI – Unione Matematica Italiana (svoltasi a Taormina, nel 1951), produsse una serie fatta di cinquanta modelli, dei quali quarantatré in gesso, ottenuti "ricalcandoli" (in ciò avvalendosi dell'opera di artigiani fiorentini) dagli originali, realizzati in Germania nell'Ottocento, che l'Università di Pavia aveva acquistato, per la maggior parte, dall'editore Brill (Palladino F. & Palladino N., 2009).

In figura 1 sono riprodotti due oggetti acquistati dalla ditta Brill-Schilling e ora appartenenti all'Università di Napoli "Federico II": la ciclode e la superficie di Boy.

Per un ampio studio sull'utilizzo dei modelli nell'insegnamento universitario e preuniversitario si veda Giacardi (2013).



Fig. 1. Modelli di ciclode (a) e di superficie di Boy (b) conservati presso l'Università di Napoli "Federico II".

LA COLLEZIONE NAPOLETANA

In Italia molte sono le città le cui sedi universitarie conservano ancora presso i loro archivi raccolte di modelli matematici; tra esse troviamo Napoli, Padova, Pavia, Torino, Messina, Pisa, Catania, Roma, Firenze, Bologna, Milano, Genova, Ferrara (Palladino N., 2000; Palladino F. & Palladino N., 2001). In rapporto alla varietà degli oggetti, i fondi italiani presentano nuclei comuni di modelli; quasi tutti i fondi però si differenziano sensibilmente l'uno dall'altro e le differenze si manifestano non soltanto per la presenza o meno di singoli specifici pezzi o per intere serie ma anche per una quantità di dati caratteristici: consistenza della collezione e presenza di nuclei omogenei di oggetti (sia per l'appartenenza a una certa serie oppure anche per il materiale utilizzato per la costruzione); stato di conservazione; anno di inizio degli acquisti e anni di più intenso sviluppo; persistenza sui pezzi delle etichette originali (munite del loro contenuto didascalico); antichi inventari; antichi cataloghi; specifici opuscoli, o più propriamente manuali, in genere redatti dalle ditte costruttrici o editrici, illustrativi del significato matematico di un dato modello; pubblicazioni scientifiche, per esempio estratti, di accompagnamento (concernenti gli aspetti teorici o applicativi entro cui erano maturati gli oggetti realizzati); carteggi scientifici e, in genere, materiale d'archivio (documentanti esigenze di aggiornamento, scambi di informazioni, procedure e date di acquisto).

Per quanto riguarda la collezione afferente al Dipartimento di Matematica e Applicazioni "Renato Caccioppoli" dell'Università di Napoli "Federico II", l'inizio della costituzione sistematica della raccolta può essere fatta risalire al 1884 (Carbone et al., 1996; Carbone et al., 1998a). Nel 1906, sulla base di una assegnazione speciale di fondi, Ernesto Cesàro (1859-1906), insieme ad altri docenti della Facoltà di Scienze matematiche, procedette all'acquisizione di vari modelli e strumenti e altri furono progettati e fatti costruire. Dotata di una sua propria organicità e di finissima fattura era la piccola raccolta sviluppata da Alfonso Del Re, nell'ambito del Gabinetto di Geometria descrittiva annesso alla corrispondente cattedra di cui egli era titolare. Erano 36 modelli, dei quali 31 in legno e filo, 3 in legno e ottone, 2 in legno, ottone e crine di cavallo. Nella raccolta di Del Re i telai, chiamati anche "castelli", che tenevano i fili, in fibra naturale, delle superfici rigate rappresentate, erano in legno lavorato artisticamente con la tecnica del traforo. Dai documenti rinvenuti si legge anche che Del Re aveva fatto acquistare tre intere serie del "Catalog" di Schilling.

I contributi maggiori alla produzione napoletana furono probabilmente dati da Ernesto Pascal (1865-1940) e Roberto Marcolongo (1862-1943). Dopo la laurea conseguita a Napoli, Pascal aveva soggiornato

per un anno a Gottinga, grazie a una borsa di studio di perfezionamento per l'estero, studiando anche presso Felix Klein. Favorendo un insegnamento che, partendo dai problemi, giungesse alla spiegazione tramite l'uso di strumenti e modelli matematici, più volte preside della Facoltà di Scienze, creò un seminario matematico e laboratori annessi alle cattedre, luoghi in cui docenti e studenti potevano approfondire problematiche connesse alle lezioni, anche con l'ausilio di strumenti e modelli. Quello che Pascal pensava fosse utile all'insegnamento credeva potesse tornare utile anche alla ricerca: fu infatti uno dei maggiori progettisti di *integrati*, strumenti in acciaio e ottone che permettevano l'integrazione grafica di curve ed equazioni differenziali (Palladino F., 1985). Fu con il secondo conflitto mondiale che il materiale afferente ai vari Gabinetti di Matematica dell'Ateneo napoletano andò distrutto o disperso e gli Istituti e i Gabinetti stessi furono aboliti per confluire e dare vita a un unico Istituto di Matematica. Attualmente i modelli recuperati sono conservati nella sede universitaria di Via Mezzocannone 8, nel cosiddetto Istituto di Analisi superiore, un tempo Gabinetto di Geodesia e poi di Geometria proiettiva, riposti in bacheche di legno e vetro (Carbone et al., 1998a).

L'ATTUALE ALLESTIMENTO

I modelli oggi conservati presso il Dipartimento di Matematica e Applicazioni dell'Università di Napoli sono 119, di alcuni di essi sono rimasti solo frammenti. Gli oggetti si possono far risalire fondamentalmente ad acquisti fatti presso quattro ditte costruttrici; della già citata ditta Brill-Schilling sono rimasti 80 modelli, appartenenti alle serie I, II, V, VI, VII, VIII, IX, X, XI, XIV, XVI, XVII, XXIV, XXVI, XXVIII, XXX, XXXI, XXXII.

Dieci modelli furono eseguiti dall'Istituto per il materiale didattico "J. Ehrhardt & Co.", Schattenconstruction Lehrmittelanstalt, di Bensheim (nel Land dell'Hessen – Assia –, in Germania). Sei oggetti sono solidi compenetrati (Model of penetration) in legno duro lucidato della ditta costruttrice fondata da George Cussons, nel 1876, a Lower Broughton, presso Manchester, per la Manufacture of Educational and Scientific Apparatus. La G. Cussons & Co. fornì apparecchi e strumenti ai laboratori di numerose università del Regno Unito e di altri luoghi d'Europa e del mondo; il catalogo illustrato, edito dalla G. Cussons Ltd., "The Technical Works", aveva titolo "Apparatus for Practical Plane and Solid geometry". Vi è poi un oggetto della Société Genevoise pour la construction d'instruments de physique. Cinque oggetti di geometria proiettiva provengono da "J. Schröder", Darmstadt. Infine, alcuni oggetti sono di ideazione e costruzione napoletane: un modello in gesso progettato da Giulio Andreoli (1892-1969) nel 1927; un modello in legno progettato da Marcolongo

e realizzato da uno studente, Iannace, del 1924; un modello in legno eseguito da un altro studente, Tafuri, nel 1909; un modello in legno e fili progettato da Del Re nel corso dell'anno accademico 1901-02; due integrati di Pascal costruiti dalla Società fabbricazione apparati e materiali elettrici di Napoli.

A partire dalla metà degli anni '80 del secolo scorso sono iniziati in maniera sistematica i lavori di riordino della collezione: risistemazione, ripulitura, catalogazione, studio. Lo stato di conservazione degli oggetti è generalmente non sempre buono; per alcuni di essi è stata provata una laboriosa e complicata opera di restauro.

La sistemazione degli oggetti nelle teche è abbastanza casuale; essi sono raggruppati in base ai materiali di cui sono fatti e distinti tra modelli e strumenti. Alcuni oggetti sono posizionati vicini in base al numero dell'"Inventario dell'Istituto di Matematica", risalente al momento della ricognizione inventariale fatta eseguire da Carlo Miranda (1912-1982) nel 1945 ma datata convenzionalmente 1944. Nell'inventario si ha l'elenco dei modelli non distrutti o smarriti nel corso degli eventi bellici e sono riportati 230 oggetti. Altri oggetti sono disposti in base alla serie di appartenenza nel catalogo da cui sono stati acquistati. Nei cataloghi, gli oggetti erano raggruppati in base a caratteristiche matematiche più o meno omogenee.

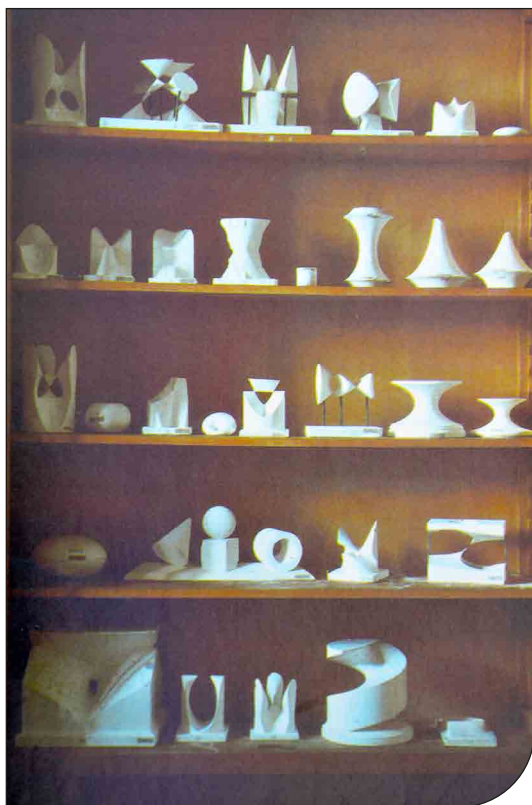


Fig. 2. Una delle teche di modelli dell'Università di Napoli "Federico II" (da Carbone et al., 1996, p. 65).

In ogni caso la loro organizzazione attuale non segue alcun criterio finalizzato a un loro utilizzo a scopi divulgativi o educativi. In figura 2 è riprodotta una delle teche che custodiscono i modelli dell'Università di Napoli.

La documentazione ufficiale riguardante l'acquisizione della collezione è quasi totalmente andata perduta, ma indizi sono stati ricavati da articoli, lettere, volumi di docenti attivi in quel periodo. La documentazione afferisce per lo più al Fondo Cesàro posseduto dallo stesso Dipartimento di Matematica e Applicazioni e custodito negli stessi locali dei modelli matematici. Essa consiste in una lettera inviata da Ettore Caporali (1855-1886) presumibilmente ad Achille Sannia (1822-1892) nel giugno del 1884, nella quale si discute di un grosso acquisto di modelli da effettuarsi presso Brill (le intere serie prima e settima). Nell'archivio sono conservati: missive e documenti relativi a operazioni di acquisto con la ditta Coradi di Zurigo (forse il più celebre costruttore dell'epoca di integratori meccanici); minute di lettere di Cesàro a un rinomato costruttore italiano di planimetri; lettere tra Schilling e Cesàro concernenti sia l'acquisto di varie serie, anche per conto di Montesano, sia l'inizio di un contatto per l'esecuzione da parte dello Schilling di alcuni modelli su progetto di Cesàro.

L'opuscolo del prof. Alfonso Del Re "Insegnamento di Geometria descrittiva" del 1906 dà notizia di una quarantina di modelli, soprattutto in legno e filo, costruiti da studenti, di cui viene fornito il nome, a partire dall'anno accademico 1901-1902.

Nell'archivio è conservato poi uno scritto celebrativo della Scuola Politecnica in occasione del centenario della sua fondazione, "R. Scuola Superiore Politecnica di Napoli nella ricorrenza del Primo Centenario MDCCCXI-MCMXI" (Stabilimento Tipografico N. Jovene et Co., Napoli, 1911, pp. 145-149), che contiene una descrizione dell'allora appena costituito Gabinetto di Meccanica razionale di Marcolongo in cui sono elencati gli strumenti e i modelli allora di recente acquisizione. Nel suo libretto "I miei integrati per equazioni differenziali" (Libreria scientifica ed industriale, Pellerano, Napoli, 1914), Ernesto Pascal descrive i numerosi integrati da lui messi a punto.

Abbiamo inoltre la relazione della Società Italiana di Matematiche "Mathesis" relativa al Congresso di Napoli dell'ottobre del 1921 ("Periodico di Matematiche", IV, II, 1922, p. 90 e segg.) che contiene l'elenco completo dei modelli esposti in quella occasione. L'opuscolo di Marcolongo, "Quaranta anni di insegnamento" (S.I.E.M., Napoli, 1935), contiene un'ampia descrizione del Gabinetto di Meccanica Razionale che egli aveva guidato.

Infine, altri dati sono stati ottenuti dal già menzionato "Inventario dell'Istituto di Matematica". I documenti d'epoca utilizzati per l'analisi della storia a Napoli di modelli e strumenti sono elencati e descritti

in Carbone et al. (1996) e in Carbone et al. (1998b). Per la collezione napoletana di modelli e strumenti esistono cataloghi a stampa, compilati secondo diversi criteri, pubblicati nel 1998 in Carbone et al. (1998b). In questi ultimi anni, i cataloghi cartacei sono stati integrati da un sito web che contiene fotografie e informazioni di tutti i modelli napoletani; nel sito sono stati inoltre digitalizzati i documenti ritrovati nei locali che si riferiscono alla collezione e che ne hanno permesso la ricostruzione dal punto di vista storico (v. sito web 1).

Nei cataloghi, gli oggetti sono stati classificati secondo criteri ritenuti efficaci dagli autori: catalogo generale; catalogo per costruttori; catalogo tematico diviso in due parti, dove nella prima vengono assegnati a ogni tema gli oggetti pertinenti e nella seconda a ogni oggetto vengono legati i temi pertinenti; catalogo per committenti; catalogo iconografico.

I reperti recuperati sono conservati nella sede di Via Mezzocannone 8 del Dipartimento di Matematica e Applicazioni nel cuore della città partenopea. I locali fanno parte di un complesso monumentale un tempo appartenuto ai Gesuiti. Costano di uno studio, di una piccola biblioteca, di una sala d'esposizione, di una sala per lezioni arredata con scanni dell'antico refettorio gesuitico. Sono di per sé di notevole interesse in quanto rappresentano un modello molto ben conservato di un istituto scientifico matematico della fine del XIX secolo (Carbone et al., 1998a).

IL PROGETTO PER UN RINNOVATO ALLESTIMENTO

Negli ultimi anni, le collezioni di modelli matematici, da strumento attivo nella ricerca scientifica e nella didattica, hanno acquisito valore di testimonianza storica e culturale di notevole significato.

Esse possono costituire valido elemento per la diffusione e per la divulgazione della cultura matematica. In particolare, i modelli napoletani sono stati oggetto di esposizioni che hanno rappresentato un'ottima occasione per valorizzare gli antichi strumenti, modelli, libri e carteggi conservati presso l'Università "Federico II" (Carbone et al., 1996).

Tuttavia, l'attuale organizzazione della collezione di modelli di superfici e strumenti conservati all'Università di Napoli è limitata alla loro esposizione in teche di legno e vetro. Gli oggetti sono disposti senza un criterio specifico e non sono accompagnati da testi, didascalie, etichette, poster o pannelli che permettano al pubblico una loro interpretazione storica o matematica. L'unica informazione che li accompagna è l'etichetta originale (o quanto di essa rimane) apposta sull'oggetto.



Per poter aprire la collezione al pubblico e al mondo della scuola in modo fruibile è indispensabile rinnovare l'organizzazione della raccolta stessa. Perseguendo tale finalità, per ogni modello si sta provve-

dendo a integrarne l'esposizione con alcuni pannelli; ogni pannello contiene un testo e delle immagini e in esso sono presentate, in breve, le seguenti informazioni relative all'oggetto in esposizione: viene riportata l'etichetta originale (o quanto di essa resta); viene dato un riferimento ai cataloghi d'epoca della ditta presso cui l'oggetto fu acquistato; viene data l'indicazione della serie e del numero nella serie che il modello occupa nel catalogo; viene data la posizione occupata dal modello nella sezione tematica del catalogo stesso e, laddove noto, l'esecutore del modello. Altre informazioni riportate nel pannello riguardano: l'equazione matematica dell'oggetto; la descrizione dell'ente matematico che rappresenta; l'origine storica, l'ideatore, il costruttore del modello. Si riporta anche la ricostruzione digitale dell'oggetto.


Di tali pannelli sono stati realizzati, per ora, alcuni prototipi, di cui si presenta in figura 3 quello relativo alla "Superficie di rotazione della trattrice" o "Pseudosfera".

Il pannello della "Pseudosfera" contiene una fotografia dell'oggetto in esposizione con la data in cui esso fu costruito dalla ditta Brill-Schilling (le foto sono quelle del catalogo cartaceo in Carbone et al., 1998b); accanto è inserita un'immagine della sua ricostruzione ottenuta tramite il software Wolfram

Superficie di rotazione della trattrice

<p>Old: 1877</p> 	<p>New: 2020</p> 
---	--

Etichetta: Rotationsfläche der Tractrix
 Nome completo: Die Rotationsfläche der Tractrix mit geodätischen und Haupttangenten-Curven
Catalog mathematischer Modelle, 1911, Serie 1, n. 1; 230.
 Il modello originale in gesso fu realizzato da J. Bacharach sotto la guida di Alexander Brill presso l'Istituto di Matematica della *Technische Hochschule* di Monaco di Baviera. Fu prodotto in serie a partire dal 1877 dalla casa editrice L. Brill.



Le curve disegnate in blu sono linee geodetiche, quella rossa è una curva asintotica

Equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(u, v) = \cos u \cdot \sin v & 0 < u < 2\pi; \\ y(u, v) = \sin u \cdot \sin v & 0 < v < \pi \\ z(u, v) = \cos v + \log\left(\tan \frac{v}{2}\right) \end{cases}$$

La superficie si genera dalla rotazione della curva trattrice intorno al suo asintoto.

Il matematico Eugenio Beltrami individuò in questo tipo di superficie, detta anche pseudosfera, un primo modello per la geometria non euclidea e ne costruì esemplari in carta. Un suo modello originale è conservato nell'Istituto di Matematica dell'Università di Pavia.

Per approfondire: C.B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori Editore, Milano 1990.
 A.C. Capelo, M. Ferrari, La cuffia di Beltrami: storia e descrizione, *Bolettino di storia delle scienze matematiche* 2, 1982.

Fig. 3. Pannello di accompagnamento alla "Superficie di rotazione della trattrice" (o "Pseudosfera").

Mathematica e il linguaggio Web Resource Modeling Language. A tal proposito, si vuole mettere in evidenza che nel sito web di accompagnamento alla collezione, sono presenti alcune riproduzioni virtuali in 3D delle superfici della collezione.

Al di sotto della fotografia, compaiono la dicitura riportata sull'etichetta applicata al modello originale, il nome per esteso del modello (in tedesco), il nome del catalogo da cui esso è stato acquistato ("Catalog mathematischer Modelle"), la serie di cui faceva parte. Il numero "230" indicato subito dopo si riferisce al numero del paragrafo in cui, nel "Catalog" alla sezione tematica, vengono illustrate le proprietà e alcuni dettagli dell'oggetto matematico che il modello rappresenta, compreso il disegno dell'oggetto venduto. A seguire, sono riportate le informazioni sulla costruzione dell'oggetto e alcune altre caratteristiche peculiari.

Nella colonna di destra sono riportati le equazioni della superficie, da cui è stata anche elaborata l'immagine digitale (Palladino N., 2004; Palladino N. & Maddalena, 2005), e alcuni dettagli che consentono una migliore comprensione dell'oggetto dal punto di vista matematico.

Ancora al di sotto, sono riportate alcune note storiche di particolare rilievo che permettono di inserire l'oggetto nel suo contesto storico-matematico. In fondo, sono indicati riferimenti bibliografici da consultare per informazioni più approfondite, dal punto di vista sia matematico che storico.

Il secondo cambiamento da apportare per la riorganizzazione della collezione riguarda la realizzazione di una seconda tipologia di pannelli esplicativi, relativi a gruppi omogenei di oggetti. I modelli oggi presenti nelle teche napoletane si riferiscono ai seguenti macroargomenti matematici, a loro volta ulteriormente specificabili: superfici del secondo ordine, superfici algebriche del terzo ordine, superfici algebriche del quarto ordine, superfici algebriche di ordine superiore al quarto, superfici a elica, superfici sviluppabili e curve nello spazio, geometria infinitesimale delle superfici, geometria descrittiva e proiettiva, topologia, teoria delle funzioni, meccanica e cinematica, fisica matematica, strumenti di calcolo.

In tale ottica, sono stati elaborati alcuni pannelli esplicativi che mirano alla presentazione di specifici concetti matematici utilizzando i modelli in esposizione. Si precisa che talvolta sono utilizzati anche oggetti non conservati nella collezione napoletana; ciò si rende necessario per completezza storica o per meglio presentare il concetto matematico che si sta illustrando. In questi casi, viene indicata la sede in cui l'oggetto è conservato. Sono stati per ora ideati alcuni prototipi di tali pannelli relativi ai seguenti concetti matematici: sezioni coniche e superfici quadriche; curvatura di una superficie e punti nello spazio; poliedri regolari; piano proiettivo.

Ogni pannello realizzato è composto da diversi ri-

quadri in ognuno dei quali sono affrontate, in modo indipendente l'una dalle altre, questioni relative a diversi aspetti storici e matematici del concetto da esplicitare e dei modelli. Il target di pubblico a cui questi pannelli si rivolgono è sostanzialmente rappresentato da studenti di scuole secondarie di secondo grado e studenti universitari dei primi anni di corsi di laurea scientifici, come matematica o ingegneria. Un utilizzo appropriato di tali pannelli, da parte di docenti e studenti, comporta che i modelli in esposizione si integrino in modo fluido nella cultura e nell'educazione matematica e possano completare la conoscenza matematica impartita nella didattica curricolare a scuola. Pianificando l'intervento museale con la selezione di argomenti che l'insegnante ha trattato o tratterà in aula e di cui la visita museale costituisce un approfondimento o uno stimolo, gli studenti avranno la possibilità di vedere concretizzati negli allestimenti della collezione concetti presenti nel curriculum scolastico.

Il pannello "La curvatura di una superficie e la classificazione dei punti nello spazio" di figura 4 è composto da più riquadri che possono essere affrontati indipendentemente l'uno dall'altro e offre approfondimenti storici e matematici sui concetti coinvolti. In particolare, esso mira a presentare il concetto di curvatura e la classificazione dei punti utilizzando, per la spiegazione, i modelli di superfici della collezione. Il pannello riporta nozioni storiche generali sui modelli interessati (dove e da chi furono costruiti e da quale catalogo furono acquistati) e illustra separatamente nei vari riquadri le nozioni matematiche di curvatura, punto parabolico, punto ellittico, punto iperbolico. L'ultimo riquadro (quello in basso a destra) contiene indicazioni per semplici attività di tipo manipolativo da poter effettuare con materiali di facile reperibilità. Il pannello permette di far comprendere più approfonditamente quale fosse il ruolo dei modelli di superficie nella didattica del periodo in cui vennero concepiti e poi realizzati. Essi consentivano e ancora oggi consentono di vedere concretamente concetti matematici altrimenti difficilmente rappresentabili, rendendo possibile mostrare concetti che altrimenti rischierebbero di risultare evidenti solo per menti esercitate alla matematica e alla geometria. Così utilizzati e presentati, i reperti della collezione e la loro storia costituiscono una fonte inesauribile di materiali da cui trarre percorsi, aneddoti, risorse, metodi per mostrare la disciplina da punti di vista diversi rispetto a quelli con cui normalmente è vista e per permettere connessioni interdisciplinari anche in ambito scolastico e universitario.

L'ulteriore accorgimento da realizzare ai fini di una migliore fruizione della collezione matematica e di un suo impiego nell'educazione e divulgazione matematica è la creazione di pannelli introduttivi alla collezione che fungano da presentazione ai luoghi e alla raccolta. In essi è previsto che vengano descritte

LA CURVATURA DI UNA SUPERFICIE E LA CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI NELLO SPAZIO

Gli oggetti riportati (Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3, Fig. 4, Fig. 5) sono modelli nati tra gli anni 70 del 1800 e gli anni 30 del 1900 per scopi didattici, cioè per spiegare dei concetti matematici: in particolare questi 5 oggetti sono usati nel campo della geometria differenziale per studiare i concetti di CURVATURA e la classificazione dei PUNTI nello spazio.

Il modello in carta è uno dei pochi modelli italiani autentici giunto a noi costruito da Beltrami, mentre gli altri oggetti in gesso sono stati riprodotti seguendo il catalogo tedesco di Bill Shilling e per l'oggetto in nylon, riprodotto dal matematico italiano Luigi Campedelli è stato seguito il catalogo tedesco Stoll. Tali oggetti oggi sono conservati in diversi musei delle università di tutta l'Italia.

LA CURVATURA

La CURVATURA di una superficie in un punto P misura lo scostamento della superficie dal piano tangente in P.

Data una qualsiasi superficie S , un punto P di S e la retta n normale a S in P (cioè perpendicolare a S in P). Ogni piano che contiene la normale n taglia la superficie secondo una curva che prende il nome di sezione normale per P . Le sezioni normali hanno una curvatura in P che varia al variare del piano. Consideriamo il raggio di curvatura R , cioè l'opposto di $1/R$. Per P passa un fascio di piani contenenti la normale n .

Culoni (1707-1793) ha però dimostrato che esistono e sono uniche una direzione per la quale la curvatura è massima ed una direzione per la quale la curvatura è minima. Le curvature in tali direzioni sono dette curvature principali K_1 e K_2 . La CURVATURA GAUSSIANA di P è $K = K_1 \cdot K_2$ (o $K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$ secondo i raggi delle circonferenze massime e minime). La curvatura gaussiana di una superficie può assumere valori positivi, nulli o negativi.

Se la curvatura in P è positiva tutte le sezioni normali per P vogliono la concavità della stessa parte rispetto alla direzione della normale, se la curvatura è negativa vogliono la concavità in direzioni opposte. In base ai valori della curvatura gaussiana si possono classificare i punti su S , in essi, in particolare esistono tre tipologie di punti:

I PUNTI IPERBOLICI, I PUNTI ELLITTICI E I PUNTI PARABOLICI.

I PUNTI PARABOLICI

I punti parabolici giacciono su superfici a curvatura gaussiana nulla, in particolare le due curvature principali sono una diversa da zero e una nulla, ne sono un esempio il piano (le due sezioni normali sono rette che hanno curvatura nulla) e il cilindro.

Il modello del cilindro presentato è in gesso e fa parte di una collezione di 540 oggetti conservati all'università di Göttingen in Germania, classificati in base al catalogo tedesco per argomenti matematici, nel catalogo Shilling è classificato come superficie del secondo ordine.

Nel cilindro a fianco sono evidenziate in giallo le sezioni normali di un cilindro. La sezione orizzontale è una circonferenza ed ha curvatura massima K_1 , quella verticale è una retta ed ha curvatura minima $K_2=0$. Il cilindro stesso non ha quindi curvatura nulla in ogni punto essendo $K=K_1 \cdot K_2=0$.

I PUNTI IPERBOLICI

I punti iperbolici sono caratterizzati da un valore costante negativo della curvatura gaussiana della superficie su cui giacciono, in particolare la curvatura massima è minima K_1 e K_2 sono diverse da zero e hanno segni opposti. Tali punti si possono osservare sulla superficie chiamata PSEUDOSFERA o CURVA DI BELTRAMI (Fig. 1).

Eugenio Beltrami (1835-1900), uno tra i più grandi matematici italiani ha costruito vari modelli di Pseudosfera tra il 1880 e il 1892, ma l'unico esemplare rimasto è quello del 1889 conservato nel Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia. Esso è presentato come una superficie flessibile di forma circolare costruita dal collage di 124 quadrilateri di carta. Ogni frammento di carta approssima un pezzo di Pseudosfera delimitato da due paralleli e due meridiani della Pseudosfera stessa ed è munito di espansioni tali da generare l'incollatura a quelli adiacenti. Nonostante sia stato costruito nel 1889, il modello della Pseudosfera di Beltrami fu la sua prima comparsa pubblica il 18 novembre 1873 durante il discorso di inaugurazione dell'anno accademico 1873-74 dell'Università di Pavia tenuto da Felice Casorati (1835-1890). Esistono riproduzioni, ispirate ai modelli del catalogo Shilling, che lo classificano come superficie della geometria iperdimensionale e lo riportano nella Serie IV dei modelli in filo.

Dal punto di vista matematico la Pseudosfera, così chiamata perché rispetto alla sfera ha curvatura costante di segno opposto cioè $K = -1/R^2$, è una superficie di rotazione della triplice "seconde" al proprio asintoto.

Traffice "Rotazione=Pseudosfera"

Il raggio di curvatura R_1 è positivo perché il centro di curvatura si trova sulla normale al di sopra di P . La seconda R_2 è la sezione normale che ha curvatura massima, ne vogliono la concavità verso l'alto rispetto all'orientamento di n . Il raggio di curvatura, R_2 è negativo perché il centro di curvatura si trova sulla normale al di sotto di P .

Poiché $K = 1/R_1 \cdot 1/R_2$ segue che la curvatura K è negativa nel punto P .

Ci sono superfici caratterizzate da entrambi i punti: iperbolici ed ellittici, ne è un esempio il TOROIDE, si ottiene dalla rotazione di una circonferenza intorno ad un asse.

Tali oggetti realizzati in gesso, oggi fa parte della collezione dell'Università di Dundee (Scozia). Questi oggetti vennero ordinati dalla società tedesca Martin Schilling nei primi anni del 1900 da E. A. Stegall, il primo professore di matematica dell'Università.

Nella realtà un modello a punti ellittici e iperbolici è usualmente usato e la bottiglia dell'acqua. Nella bottiglia il punto sul collo rappresenta un punto iperbolico e il punto P un punto ellittico.

I PUNTI ELLITTICI

I punti ellittici sono i punti che giacciono su superfici con curvatura gaussiana positiva, in particolare le curvature principali K_1 e K_2 hanno lo stesso segno e sono diverse da zero.

Un esempio di superficie con curvatura gaussiana positiva è il modello della SFERA, che è una superficie di rotazione di una curva intorno ad un asse. Tale rotazione in gesso è stata realizzata basandosi sul catalogo di Shilling, che lo riporta come superficie del secondo ordine nella Serie XXVII dei modelli della geometria proiettiva, ed oggi conservato nella collezione dell'Università di Groningen nei Paesi Bassi.

Le due curve evidenziate in arancione nella sfera a fianco sono le due sezioni normali di curvatura in P rispettivamente minima e massima. La curva r_1 ha raggio di curvatura massimo in P , quindi ha curvatura minima $K_1=1/R_1$, la curva r_2 ha raggio di curvatura minimo in P , quindi curvatura massima $K_2=1/R_2$.

Le due curve si trovano su piani ortogonali. Le curve sezione hanno il raggio di curvatura che varia con continuità tra r_1 e r_2 (tra il minimo e il massimo).

Inoltre le due curve sezione vogliono la concavità errante verso il basso rispetto alla normale orientata; ne segue che i raggi di curvatura r_1 e r_2 hanno entrambi segno negativo perché il centro di curvatura si trova sulla semiretta opposta alla normale orientata come in figura e con origine in P e quindi la curvatura $K = 1/R_1 \cdot 1/R_2$ nel punto P è positiva. Orientando la normale nell'altro modo possibile si avrà ancora un valore positivo per K . Nel caso di una superficie ellittica di raggio r si ha che tutte le sezioni normali, per qualsiasi punto P sono uguali come infatti confermano le massime di curvatura $1/r$, il piano tangente è perpendicolare al raggio della sfera per P , quindi la normale n passa per il centro della sfera, ne segue che la curvatura della superficie è ovunque uguale a $1/r^2$.

NE SIETE CONVINTI?!? ORA TOCCA A VOI!!!

Si può verificare la tipologia di curvatura di una superficie istruendo una sua piana.

"PUNTI IPERBOLICI:
In questo caso di curvatura negativa non si riuscirà ad appiattare la superficie, per fare ciò sono necessarie delle sovrapposizioni.

Per ottenere questa superficie disegnate su un foglio di carta un cerchio e un rettangolo con lo stesso raggio del cerchio e un'ampiezza di 60 gradi. Ritagliate il cerchio e il rettangolo e fate una fessura sul cerchio lungo il raggio. Nella fessura inserite il rettangolo e ricostituite il cerchio e la fessura sulla superficie. Tale operazione non è possibile farla sul piano, ma si potrà fare se farete flettere la superficie nella terza dimensione. Otterrete così un ellittico a sella.

Se provate ad appiattare la sella sul piano poggiando sopra un peso, vedrete che si formano delle pieghe, delle sovrapposizioni.

"PUNTI ELLITTICI:
Anche una superficie a curvatura gaussiana positiva non si riesce ad appiattare sul piano, per fare ciò è necessario fare delle lacerazioni sulla superficie.

Considerando un'arancia tagliata a metà lungo una circonferenza massima se provate ad appiattirla non ci riuscite. L'unico modo è quello di fare dei tagli radiali sulla superficie.

"PUNTI PARABOLICI:
In questo caso riuscite ad appiattare la superficie senza operare lacerazioni o sovrapposizioni. Si può avvolgere un cilindro con un foglio senza fare alcuna fessura o lacerazione nel foglio. Qualsiasi regione di superficie cilindrica può essere resa perfettamente piana. Una superficie cilindrica la potete ottenere arrotondando un foglio di carta.

Fig. 4. Pannello relativo ai concetti di curvatura di una superficie e punti nello spazio.

la storia della raccolta matematica e le sue origini, si illustrano la provenienza degli oggetti e le modalità d'acquisto e d'impiego; si pongano in luce le eminenti personalità che contribuirono alla formazione della collezione di modelli e, in generale, alla cultura matematica napoletana. Si metteranno inoltre in evidenza la storia degli ambienti interessati e l'utilizzo che di essi venne fatto durante i secoli. Verranno indicati le fonti, i carteggi, i documenti ritrovati e conservati da cui sono state reperite le informazioni sui modelli. Tramite le notizie riportate nei pannelli si auspica un'apertura al territorio dei luoghi e della collezione, mostrando come la loro storia è strettamente collegata alla storia degli edifici, dell'urbanistica della città, della cultura dell'epoca, matematica e non solo.

CONCLUSIONI

I modelli di superfici matematiche sono oggi conservati, in Italia, principalmente presso musei scientifici o presso istituti universitari. Studiati e ammirati per il loro valore storico e come testimonianza di un modo di fare didattica e ricerca riservato al passato, il loro impiego oggi nella divulgazione e nell'educazione matematica resta piuttosto marginale. In un'ottica di integrazione tra attività dei musei, divulgazione matematica, attività delle scuole, si vuole tentare di accentuare la funzione educativa della collezione napoletana di modelli, in cui i reperti continuano a

costituire parte del cuore del patrimonio materiale dell'Università, con un impegno rivolto a presentare gli oggetti nel modo più idoneo a stimolare studenti e visitatori in generale. Una riorganizzazione consentirebbe l'apertura della collezione matematica al pubblico e al mondo della scuola, permettendo anche la valorizzazione dei locali storici in cui la collezione è conservata e la diffusione della conoscenza degli eccellenti scienziati che vi lavorarono.

Nel nuovo allestimento della collezione si vorrebbe integrare agli oggetti esposti una serie di informazioni storiche e matematiche, ma anche approfondimenti su concetti matematici più complessi, idonei a dialogare di matematica in un museo scientifico sia con studenti sia con un pubblico generico. Si vuole appunto provare a dare un nuovo impulso alla collezione di modelli e strumenti matematici che possono essere riutilizzati dando loro valenza educativa e divulgativa insistendo sul loro valore storico, costituendo essi pezzi unici del nostro patrimonio culturale. In tal modo, si va incontro a ciò che si auspica sia uno dei compiti culturali del museo scientifico (Ghiara & Gianoli, 2011: 12): illustrare e documentare, con l'ausilio delle collezioni, l'importanza e il ruolo che la ricerca scientifica ha avuto e continua ad avere nello sviluppo della società. La Scienza potrà essere vista come parte viva e integrante della società civile e non più come una semplice acquisizione di nozioni, nomi, formule e dati.

Tale prospettiva di utilizzo di questi oggetti consente contemporaneamente protezione dell'eredità culturale, diffusione della conoscenza nella società intesa nel senso più ampio, valorizzazione e diffusione della cultura scientifica, sdoganamento della matematica dall'ambito tecnico in cui è spesso relegata; si fa notare, a tal proposito, che spesso i modelli plastici, soprattutto quelli realizzati in gesso, hanno ispirato architetti, pittori e scultori dell'epoca moderna e contemporanea (Palladino F. & Palladino N., 2009; Vierling-Claassen, 2010).

Come rileva A. Valente (Falchetti, 2007: 37), i musei scientifici si caratterizzano proprio per le loro collezioni: "il museo parte da quello che ha, anche dall'autorevolezza che lo caratterizza e va incontro alla società fungendo da ponte tra scienza e società stessa". Il museo, pur non dismettendo il proprio abito usuale, ha il potere di creare altre, nuove prospettive aprendosi ancor di più alle scuole e alla società.

BIBLIOGRAFIA

CAPÉLO A.C., FERRARI M., 1982. La "cuffia" di Beltrami: storia e descrizione. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 2: 233-247.

CARBONE L., CARDONE G., PALLADINO F., 1996. Le Collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II". *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie IV, LXIII*: 33-65.

CARBONE L., CARDONE G., CASANOVAS J., MANCUSO S., PALLADINO F., 1998a. La sede storica degli Studi Superiori di Matematica a Napoli nella sua attuale configurazione. *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie IV, LXV*: 31-66.

CARBONE L., CARDONE G., PALLADINO F., 1998b. Le collezioni di strumenti e modelli matematici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni "R. Caccioppoli" dell'Università degli Studi di Napoli "Federico II": cataloghi ragionati. *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie IV, LXV*: 93-257.

CARBONE L., GATTO R., PALLADINO F., PALLADINO N., 2002. Il fondo di antichi libri scientifici del Dipartimento di Matematica e Applicazioni della "Federico II" di Napoli: Cataloghi ragionati. *Rendiconto dell'Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie IV, LXIX*: 145-277.

FALCHETTI E., 2007. Costruire il pensiero scientifico in museo. Spunti e riflessioni sull'educazione scientifica nei Musei delle Scienze. *Museologia Scientifica Memorie*, 1, pp. 256.

FISCHER G., 1986. *Mathematical Models from the Collections of Universities and Museums*. F. Vieweg & Sohn, Braunschweig.

GIACARDI L., 2013. *Models in mathematics teaching in Italy (1850-1950)* (<http://www.math-art.eu/Documents/pdfs/Cagliari2013/MODELS%20IN%20MATHEMATICS%20TEACHING%20IN%20ITALY-EN-REV.pdf>).

GHIARA M.R., GIANOLI R., 2011. La necessità di "professionisti" per una incisiva comunicazione scientifica nei musei. In: Ghiara M.R., Del Monte R. (a cura di), *Atti del XIX Congresso ANMS, Strategie di comunicazione della scienza nei musei*. Napoli 18-20 novembre 2009. *Museologia Scientifica Memorie*, 8: 8-14.

MORELLI A., PALLADINO F., 1992. Sui modelli matematici in gesso. *Lettera Pristem, Dossier didattico*, 6: XIII-XVI.

PALLADINO F., 1985. Ernesto Pascal e gli integrali per equazioni differenziali. *Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza*, 10: 67-77.

PALLADINO F., PALLADINO N., 2001. Sulle raccolte museali italiane di modelli per le matematiche superiori. Catalogo generale e sito web. *NUNCIUS - Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza di Firenze*, 16: 781-790.

PALLADINO F., PALLADINO N., 2009. I modelli matematici costruiti per l'insegnamento delle matematiche superiori pure e applicate. *Ratio Mathematica*, 19: 31-87.

PALLADINO N., 2000. *Una raccolta museale di modelli per l'insegnamento delle Matematiche superiori*. Tesi di Laurea in Matematica, Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Napoli "Federico II", A.A. 1999/2000.

PALLADINO N., 2004. *E-learning: superfici matematiche in 3D*. Tesi di Dottorato in Matematica applicata e Informatica, Università degli Studi di Napoli "Federico II".

PALLADINO N., MADDALENA L., 2005. *Una applicazione di software matematico per la ricostruzione virtuale di antichi modelli di interesse per la didattica della matematica*. TR-I-CAR-NA-C.N.R. Istituto di Calcolo e Reti ad Alte Prestazioni del Consiglio Nazionale delle Ricerche, 5-6, opuscolo, 13 pp.

SCHILLING M., 1911. *Catalog mathematischer Modelle*. Verlag von M. Schilling, Leipzig.

VIERLING-CLAASSEN A., 2010. *Models of Surfaces and Abstract Art in the Early 20th Century*. *Bridges* (<http://archive.bridgesmathart.org/2010/bridges2010-11.pdf>).

Siti web (ultimo accesso 31.05.2021)

1) www.dma.unina.it/~nicla.palladino/catalogo/

Submitted: September 17th, 2020 - Accepted: June 1st, 2021
Published: December 10th, 2021